PARTIEL 14 novembre 2006

Intégration et théorie de la mesure LM363

Durée 2 heures. Documents interdits

Toute application d'un résultat prouvé ou énoncé pendant le cours doit être signalée et justifiée avec précision.

Exercice 1

1. Quelle est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $\{[0,2],[1,3]\}$?
2. Quelle est la tribu de $[0,3]$ engendrée par $\{[0,2],[1,3]\}$?

Exercice 2 Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ calculer la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx$$

Exercice 3 Soit $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

1. Montrer que $\text{Card}(X) = \text{Card}(Y)$ implique $\text{Card}(\mathcal{P}(X)) = \text{Card}(\mathcal{P}(Y))$ et en déduire que $\text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}))$.
2. Montrer que $\text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})) \le \text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}))$ avec une injection explicite.
3. En déduire que $\text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et que $\text{Card}(\mathbb{R}^2) = \text{Card}(\mathbb{R})$.
4. Trouver une bijection explicite entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 4 Soit $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$. Pour tout $L > 0$ on note :

$$\mu_L : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto [0,+\infty], \qquad \mu_L(A) := \sum_{k\in A} L^k, \quad A \subseteq \mathbb{N}.$$

1. Prouver que μ_L est une mesure sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ pour tout $L > 0$.
2. Pour quels $L > 0$ la mesure μ_L est-elle finie ? Et pour quels $L > 0$ est-elle une mesure de probabilité ?
3. Soit $A_n := \mathbb{N} \cap [n,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mu_L(A_n)$ et $\mu_L(\mathbb{N}\backslash A_n)$ pour tous $L > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,+\infty[$, $L_n \le L_{n+1}$, $L_n \nearrow L_0 \in]0,+\infty[$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $A_n \subseteq A_{n+1}$, $A := \cup_n A_n$. Prouver que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{L_n}(A_n) = \mu_{L_0}(A).$$

Correction

Solution de l'exercice 1 (3 points sur 20)

1. La tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathcal{A} := \{[0,2],[1,3]\}$ contient forcément :

$$\left\{\begin{array}{l} \emptyset, [0,1[, [1,2],]2,3], [0,2], [0,3], [1,3], [0,1[\cup]2,3], \\ \mathbb{R}, [0,1[^c, [1,2]^2,]2,3]^c, [0,2]^2, [0,3]^2, [1,3]^c, ([0,1[\cup]2,3])^c \end{array}\right\}.$$

   Cet ensemble de 16 parties de $\mathbb{R}$ est stable par union et par passage au complémentaire. C'est donc la tribu $\sigma(\mathcal{A})$ cherchée.

   Une réponse plus conceptuelle consiste à remarquer que $\sigma(\mathcal{A})$ est aussi la tribu engendrée par la partition de $\mathbb{R}$ à 4 éléments $\mathcal{C} := \{[0,1[, [1,2],]2,3], [0,3]^c\}$. La tribu engendrée par la partition $\mathcal{C}$ est en correspondance avec l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ et possède donc les 2^4 éléments donnés.

2. La tribu $\sigma(\mathcal{A})$ de $[0,3]$ engendrée par $\mathcal{A} := \{[0,2],[1,3]\}$ contient forcément

$$\{\emptyset, [0,1[, [1,2],]2,3], [0,2], [0,3], [1,3], [0,1[\cup]2,3]\}\,.$$

   Cet ensemble de 8 parties est stable par union et par passage au complémentaire. C'est donc la tribu $\sigma(\mathcal{A})$ cherchée. La partition de $[0,3]$ qui engendre $\sigma(\mathcal{A})$ est : $\{[0,1[, [1,2],]2,3]\}$.

Solution de l'exercice 2 (4 points sur 20)

Pour tout $n \geq 1$ la fonction $f_n(x) := (x^\alpha + \frac{e^x}{n})^{-1}$, $x \in [0,1]$, est continue et donc intégrable (si $\alpha = 0$ on pose $0^0 = 1$ et si $\alpha < 0$ on peut écrire :

$$f_n(x) \;=\; \frac{x^{-\alpha}}{1 + \frac{x^{-\alpha}e^x}{n}} \implies \lim_{x\to 0^+} f_n(x) = f_n(0) = 0).$$

En plus $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ (remarquer l'inégalité $0 \leq f_n$ qui est une hypothèse importante pour la validité du Théorème de Beppo-Levi) et

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; x^{-\alpha} =: h_\alpha(x), \qquad \forall x \in\,]0,1]$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. En particulier, f_n converge à h_α λ-p.p. Donc par le Théorème de Beppo-Levi :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx \;=\; \int_0^1 x^{-\alpha}\, dx.$$

Pour calculer la valeur de cette intégrale on note que h_α est continue sur $[1/k, 1]$ et donc Riemann-intégrable sur $[1/k, 1]$ pour tout $k \geq 1$. Or :

$$\int_{\frac{1}{k}}^{1} x^{-\alpha}\, dx \;=\; \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - k^{-1+\alpha}\right), \qquad \alpha \neq 1$$

$$\int_{\frac{1}{k}}^{1} x^{-1}\, dx \;=\; \ln k.$$

Si on note $g_k := 1_{[1/k,1]} \cdot h_\alpha$ on a $0 \leq g_k \leq g_{k+1} \nearrow h_\alpha$ et encore par le Théorème de Beppo-Levi :

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\, dx \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{1}{k}}^{1} x^{-\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Solution de l'exercice 3 (6 points sur 20)
On peut commencer par rappeler que :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}, \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A : A \subseteq \mathbb{N}\}, \quad \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \{B : B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}\},$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{(C, D) : C \subseteq \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{N}\}.$$

1. Si $f : X \mapsto Y$ est une application quelconque alors on peut définir

   $$F : \mathcal{P}(X) \mapsto \mathcal{P}(Y), \qquad F(A) := f(A) = \{y \in Y : y = f(x), x \in A\}.$$

   Si f est une bijection d'inverse f^{-1} alors F est une bijection d'inverse $F^{-1}(A) := f^{-1}(A)$.
   Puisque $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ont la même cardinalité, il existe une bijection $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et donc une bijection $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

2. Une application naturelle $G : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ est la suivante : si $(C, D) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$

   $$G(C, D) \;:=\; C \times D \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

   Or G n'est pas injective car $G(\emptyset, B) = \emptyset \times B = \emptyset$ pour tout $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
   Mais G restreinte à $(\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\})$ est bien une injection.
   Puisque $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini il existe une injection $H : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}$ et on obtient une injection $G' : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

   $$G'(C, D) \;:=\; H(C) \times H(D)$$

Si on veut une H explicite, on peut définir :

$$H(A) := \{1\} \cup (A+1) = \{n \in \mathbb{N} :\ n = 1 \text{ ou } n-1 \in A\}.$$

Pour tout $A \subseteq \mathbb{N}$, on obtient $\{1\} \cup (A+1)$ avec une translation à droite de A d'une unité ($A \mapsto (A+1)$) et en ajoutant l'élement 1 à l'ensemble translaté ($(A+1) \mapsto \{1\} \cup (A+1)$).

3. On déduit des points 1 et 2 que

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})).$$

Pour voir que

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}))$$

on peut donner soit une injection $J : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ soit une surjection $S : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Des injections naturelles sont :

$$J_1 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad J_1(A) := (A, \{1\})$$

$$J_2 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad J_2(A) := (A, A)$$

et une surjection naturelle est

$$S : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad S(A, B) := A.$$

Donc on a bien que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On déduit des deux inégalités et du Théorème de Bernstein que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
Puisque $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ ont la même cardinalité on en déduit que $\mathrm{Card}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

4. Par exemple $K : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$K(A, B) \ :=\ (2A) \cup (2B-1) \ =\ \{2n : n \in A\} \cup \{2m-1 : m \in B\}$$

est une bijection. Autrement dit, on identifie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ à l'aide de la bijection :

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \ni A \mapsto (a_1, a_2, a_3, \ldots), \quad a_n = 1_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{si } n \notin A \end{cases}$$

et on définit l'injection $\mathcal{K} : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mapsto \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$$\mathcal{K}\left((a_1, a_2, a_3, \ldots), (b_1, b_2, b_3, \ldots)\right) := (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, \ldots).$$

Solution de l'exercice 4 (7 points sur 20)
Soit $L > 0$ fixé.

1. On peut prouver que μ_L est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ à l'aide de théorèmes vus en cours : si $L = 1$, μ_L est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Si $L \neq 1$, μ_L est la mesure de comptage μ_1 multipliée par la densité $f : \mathbb{N} \mapsto [0, \infty[$, $f(k) = L^k$.
   Une autre démonstration est la suivante : $\mu_L(\emptyset) = 0$ et si $(A_n)_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est une suite d'ensembles disjoints, on a
   $$\mu_L(\cup_n A_n) = \sum_{k \in \cup_n A_n} L^k = \sum_n \sum_{k \in A_n} L^k = \sum_n \mu_L(A_n)$$
   car l'ordre de sommation d'une série à termes positifs peut être changé sans changer la somme (il faut bien préciser ce point parce que sinon la formule ci-dessus est seulement un calcul formel).
2. On a :
   $$\mu_L(\mathbb{N}) = \sum_{k=1}^{\infty} L^k = \begin{cases} \frac{L}{1-L} & \text{si } L < 1 \\ +\infty & \text{si } L \geq 1. \end{cases}$$
   Donc μ_L est finie si et seulement si $L < 1$ et est une probabilité si et seulement si $L = 1/2$.
   (On rappelle que dans cet exercice $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Si on considère $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ on trouve qu'il n'existe aucun $L > 0$ tel que μ_L soit de probabilité).
3. $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$, $\mathbb{N} \backslash A_n = \{1, \ldots, n-1\}$,
   $$\mu_L(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} L^k = L^{n-1} \mu_L(\mathbb{N}) = \begin{cases} \frac{L^n}{1-L} & \text{si } L < 1 \\ +\infty & \text{si } L \geq 1, \end{cases}$$
   $$\mu_L(\mathbb{N} \backslash A_n) = \sum_{k=1}^{n-1} L^k = \begin{cases} L \, \frac{1-L^{n-1}}{1-L} & \text{si } L \neq 1 \\ n-1 & \text{si } L = 1. \end{cases}$$
4. La suite $n \mapsto \mu_{L_n}(A_n)$ est croissante et a donc une limite $\ell \in]0, +\infty]$. Il est clair que $\mu_{L_n}(A_n) \leq \mu_{L_0}(A)$ pour tout n, donc
   $$\ell = \sup_n \mu_{L_n}(A_n) \leq \mu_{L_0}(A).$$
   Au contraire l'inégalité $\mu_{L_0}(A) \leq \ell$ n'est pas triviale. Le Théorème de convergence monotone ou la continuité à gauche des mesures sur suites

croissantes d'ensembles mesurables ne s'appliquent pas directement parce qu'on a ici une suite de mesures, non pas une mesure fixée.

Une première preuve consiste à définir

$$f_n : \mathbb{N} \mapsto [0, \infty[, \qquad f_n(k) := (L_n)^k \, 1_{A_n}(k),$$

où 1_{A_n} est l'indicatrice de l'ensemble A_n. On a $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ (encore une fois l'inégalité $0 \leq f_n$ est importante pour la validité du Théorème de Beppo-Levi) et

$$\lim_{n\to\infty} f_n(k) \ = \ f(k) := \ (L_0)^k \, 1_A(k), \qquad \forall \, k \in \mathbb{N}.$$

On peut remarquer que :

$$\mu_{L_n}(A_n) = \sum_{k \in A_n} (L_n)^k = \int f_n \, d\mu_1, \quad \mu_{L_0}(A) = \sum_{k \in A} (L_0)^k = \int f \, d\mu_1.$$

Par le théorème de convergence monotone de Beppo-Levi :

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{L_n}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu_1 = \int f \, d\mu_1 = \mu_{L_0}(A).$$

En effet le choix de μ_1 est arbitraire : pour tout $L \in]0, +\infty[$ on peut considérer

$$g_n(k) \ := \ (L_n/L)^k \, 1_{A_n}(k), \qquad k \in \mathbb{N}$$

et appliquer le même raisonnement à g_n et μ_L à la place de f_n et μ_1.

Une autre preuve possible est la suivante, qui permet d'éviter la limite double. On veut démontrer que $\ell \geq \mu_{L_0}(A)$. Pour tout $m \leq n$ on a :

$$\mu_{L_m}(A_n) \ \leq \ \mu_{L_n}(A_n) \ \leq \ \ell$$

car $L_m \leq L_n$. On obtient pour tout $m \geq 1$:

$$\lim_n \mu_{L_m}(A_n) = \mu_{L_m}(A) \ \leq \ \ell$$

car μ_{L_m} est une mesure. On introduit

$$f_m(k) = 1_A(k) \, (L_m)^k \geq 0, \quad f(k) = 1_A(k) \, (L_0)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Par convergence monotone de la suite $(f_m)_m$ vers f on obtient la convergence des intégrales par rapport à la mesure de comptage μ_1 :

$$\ell \ \geq \ \lim_m \mu_{L_m}(A) = \lim_m \int f_m \, d\mu_1 = \int f \, d\mu_1 = \mu_{L_0}(A)$$

et la preuve est terminée.